ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2017, № 1

УДК 536.421

М.Г. Бердник
Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», Україна
пр. Карла Маркса, 19, м. Дніпро, 49005

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РІШЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ТЕПЛООБМІНУ ТІЛА, ЯКЕ ОБЕРТАЄТЬСЯ

M.G. Berdnyk
State Higher Education Institution "National Mining University", Ukraine
19, Karl Marx av., Dnipro, 49005

MATHEMATICAL MODEL AND GENERALIZED SOLUTION METHOD DIRCHELE PROBLEMS OF HEAT EXCHANGE OF RADIATION BODY

У статті за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення знайдено температурне поле ізотропного тіла обертання з відомим рівнянням твірної лінії, яке обмежене двома торцями і бічною поверхнею тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Фур’є.

Ключові слова: тіло обертання, інтегральне перетворення, критерій Фур'є, час релаксації.

In the article, with the help of the developed new integral transformation, the temperature field of an isotropic body of rotation with a known equation of the production line, which is limited by two ends and a lateral surface of rotation, which rotates at a constant angular velocity around the OZ axis, is derived, with the account of the final rate of heat propagation , in the form of convergent orthogonal series in Fourier functions.

Key words: body of rotation, integral transformation, Fourier criterion, relaxation time.

Вступ

Проблема дослідження температурних полів у тілах, що обертаються, постійно привертає увагу дослідників, так як багато елементів машин і механізмів (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.) мають їх форму і працюють в умовах інтенсивного нагріву. Більшість робіт в теорії теплопровідності присвячено вивченню та аналізу температурного поля в нерухомих тілах обертання. У деяких роботах вивчається температурне поле в тілах при рухомих джерелах тепла, в інших роботах досліджується температурне поле в тілах з рухомими межами.

Постановка проблеми

При високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1-2]. Ось чому до числа проблем, що являють великий теоретичний і практичний інтерес, належить проблема вивчення температурного поля в тілах, які обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як показує огляд літератури, теплообмін у тілах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [1]. Показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання. Так доводиться [1], що умови стійкості обчислень у методі кінцевих елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку

нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-\frac{\Delta F_0}{\Delta\varphi^2}\geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\geq 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є, Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1{,}671\,сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi\leq 2\cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o\leq 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови Bi = 5 (Bi – критерій Біо) час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo\approx 0.025$. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більше того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14\cdot 10^5$ обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3.14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату, видається нереальним. Тому для вирішення крайової задачі, яка виникає при математичному моделюванні нестаціонарних процесів теплообміну в тілах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Мета дослідження

Розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у тілах, які обертаються навколо своєї осі, у вигляді крайової задачі Діріхле математичної фізики для рівняння теплопровідності, та розв'язання отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо розрахунок температурного поля тіла обертання (рис.1) з твірною лінією $r=\xi(z)$ у циліндричній системі координат (ρ,φ,z). Ізотропне тіло обертання обмежене двома торцями S_1 ($z=0$), S_2 ($z=h$) і бічною поверхнею обертання S_3, яка перетинається з поверхнями S_j уздовж ліній L_j, $j=1,2$.

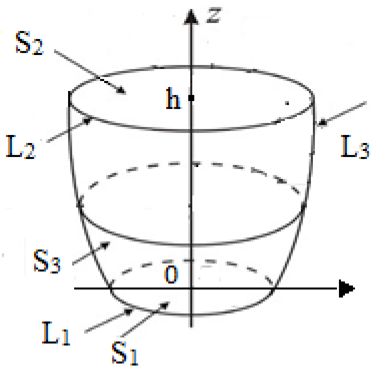


Рис. 1. Тіло обертання з твірною лінією $r=\xi(z)$.

Тіло обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω, а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на бічній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу $V(\varphi, z)$. На торцях відомі значення температури $G_1(r,\varphi)$ і $G_2(r,\varphi)$ при z=0 і z=h відповідно.

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [1] , узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системи координат набуває вигляду:

$$\gamma \,\mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\omega\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \qquad (1),$$

де $\gamma-$щільність середовища; с-питома теплоємність; $\mathrm{T}(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища; λ – коефіцієнт теплопровідності; t – час; τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області $D=\{(\rho,\varphi,z,t)|\rho\in(0,\xi(\mathrm{z})),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{z}\in(0,1),\mathrm{t}\in(0,\infty)\}$, що, з урахуванням прийнятих допущень, запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{z}^2}\right] \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho,\varphi,\mathrm{z},0)=0, \quad \frac{\partial\theta(\rho,\varphi,\mathrm{z},0)}{\partial t}=0 \qquad (3)$$

і граничними умовами

$$\theta(\xi(\mathrm{z}),\varphi,z,t)=G(\varphi,z), \qquad (4)$$

$$\theta(\rho,\varphi,0,t)=\Theta(\rho,\varphi), \quad \theta(\rho,\varphi,1,t)=\Lambda(\rho,\varphi), \qquad (5)$$

де $\theta=\dfrac{T(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла; $a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності; $T_{\max}=\max\limits_{r,\varphi,z}\{G(\varphi,z),G_1(r,\varphi),G_2(r,\varphi)\}$; $R=\max\limits_{z}\{\xi(\mathrm{z})\}$; $\chi=\left(\dfrac{R}{h}\right)^2$; $\rho=\dfrac{r}{R}$;

$z=\dfrac{z}{h}$; $G(\varphi,z),\Theta(\rho,\varphi),\Lambda(\rho,\varphi)\in\mathrm{C}(0,2\pi)$.

Тоді рішення крайової задачі (2)-(5) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z),\Theta(\rho,\varphi),\Lambda(\rho,\varphi)$, $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{Bmatrix} \theta(\rho,\varphi,z,t) \\ G(\varphi,z) \\ \Theta(\rho,\varphi) \\ \Lambda(\rho,\varphi) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \theta_n(\rho,z,t) \\ G_n(z) \\ \Theta_n(\rho) \\ \Lambda_n(\rho) \end{Bmatrix} \cdot \exp(in\varphi), \qquad (6)$$

де

$$\begin{Bmatrix} \theta_n(\rho,z,t) \\ G_n(z) \\ \Theta_n(\rho) \\ \Lambda_n(\rho,) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta(\rho,\varphi,z,t) \\ G(\varphi,z) \\ \Theta(\rho,\varphi) \\ \Lambda(\rho,\varphi) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\varphi)d\varphi,$$

$$\theta_n(\rho,z,t) = \theta_n^{(1)}(\rho,z,t) + i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t), \quad \mathrm{G}_n(z) = G_n^{(1)}(z) + iG_n^{(2)}(z),$$
$$\Theta_n(\rho) = \Theta_n^{(1)}(\rho) + i\Theta_n^{(2)}(\rho), \qquad \Lambda_n(\rho) = \Lambda_n^{(1)}(\rho) + i\Lambda_n^{(2)}(\rho),$$

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для n=0,1,2,…, тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)-(5), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r\vartheta_n^{(i)} \frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)} + \chi\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \qquad (7)$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0) = 0, \qquad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\xi(z),z,t) = G_n^{(i)}(z) \qquad (9)$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho,0,t) = \Theta_n^{(i)}(\rho), \qquad \theta_n^{(i)}(\rho,1,t) = \Lambda_n^{(i)}(\rho), \qquad (10)$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n;\ \ \vartheta_n^2 = \omega n;\ \ \mathrm{m}_1 = 2,\ \ \mathrm{m}_2 = 1;\ \ \mathrm{i}=1,2.$

Для розв'язання крайової задачі (7)-(10) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \iint_D Q(\mu_{n,k},\rho,z)\cdot\rho\cdot \mathrm{f}(\rho,z)d\sigma \qquad (11)$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},\rho,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}Q + \mu^2{}_{n,k}\cdot Q + \chi\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0 \qquad (12)$$

$$\mathrm{Q}(\mu_{n,k},\rho,0) = 0, \quad Q(\mu_{n,k},\rho,1) = 0, \quad Q(\mu_{n,k},\xi(z),z) = 0. \qquad (13)$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k}, \rho, z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ задачі Штурма-Ліувілля (12) – (13) знаходяться за формулами, які приведені в [4], формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}(\rho, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\left\| Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \right\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \tag{14}$$

Застосовуючи до системи диференціальних рівнянь (7) інтегральне перетворення (11), у результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{\theta}_n^{(i)}}{d\,t} + \vartheta_n^{(i)} \left[\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{d\bar{\theta}_n^{(m_i)}}{d\,t} \right] + \tau_r \frac{d^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{d\,t^2} = \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})} - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} \tag{15}$$

з початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t) = 0, \qquad \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t)}{\partial t} = 0\,, \tag{16}$$

де

$$\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})} = \int_0^1 \xi(z) \frac{\partial Q(\mu_n, \xi(z), z)}{\partial \rho} G_n^{(i)}(z) dz + \chi \oint_L \rho \left(Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial z} - \theta_n^{(i)} \frac{\partial Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\partial z} \right) d\rho$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому додатно орієнтованому контуру (рис.2.)

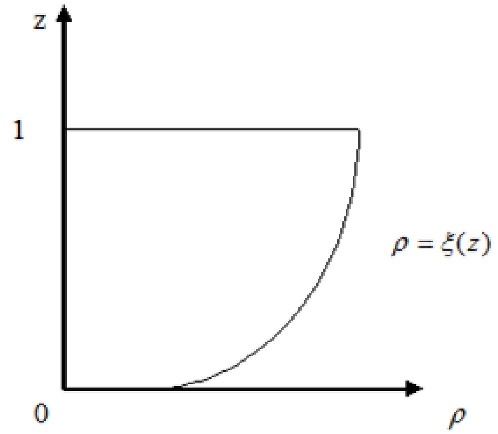


Рис. 2. Замкнутий контур з твірною лінією $r = \xi(z)$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (15) з початковими умовами (16) інтегральне перетворення Лапласа [5]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau\,.$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)}$

$$s\tilde{\tilde{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\tilde{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde{\tilde{\theta}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu^2{}_{n,k}}-\tilde{\tilde{\theta}}_n^{(i)}\right), \quad (17)$$

де i=1,2; $q_{n,k}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}\mu^2{}_{n,k}$.

Розв’язавши систему рівнянь (17), одержуємо:

$$\tilde{\tilde{\theta}}_n^{(i)}=\alpha_{n,k}\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)+(-1)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2}, \quad (18)$$

де $\alpha_{n,k}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}$; $(i=1,2.)$

Застосовуючи до зображення функцій (17) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\},$$
$$\cdot\left(e^{s_j t}-1\right), \quad (19)$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right), \quad (20)$$

де $\zeta_{n,k}(s_j)=\frac{0.5s_j^{-1}\alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j+1)^2+(\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами

$$s_{1,2}=\frac{(\tau_r\omega ni-1)\pm\sqrt{(1+\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\ s_{,3,4}=\frac{(\tau_r\omega ni+1)\pm\sqrt{(1-\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (14), одержуємо температурне поле тіла обертання, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+i\cdot\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\frac{Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},\rho,z)\right\|^2}\right\}\cdot\exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються по формулах (19),(20).

Висновки

У статті, за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення, знайдено температурне поле ізотропного тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну ізотропного тіла, яке обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.).

Література

1. Бердник М.Г. Математичне моделювання температурного поля в циліндрі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: РВВ ДНУ, 2005.– С. 37–44.
2. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
3. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б.М. – Львів: Видавництво Львівської політехніки. – 2010. – 384 с.
4. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов / В.В. Шайдуров. – М., Наука, 1989. – 288 с.
5. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування /Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус. - Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка. – 2014. – 152 с.

Literatura

1. Berdnyk M.H. Matematychne modeliuvannia temperaturnoho polia v tsylindri, yakyi obertaietsia, z urakhuvanniam kintsevoi shvydkosti poshyrennia tepla // Pytannia prykladnoi matematyky i matematychnoho modeliuvannia. – D.: RVV DNU, 2005.– S. 37–44.
2. Konet I. M. Hiperbolichni kraiovi zadachi v neobmezhenykh trysharovykh oblastiakh / I.M. Konet, M.P. Leniuk. - Lviv, 2011. – 48 s. (Prepr./ NAN Ukrainy In-t prykladnykh problem mekhaniky i matematyky im. Ia. S. Pidstryhacha; 01.11).
3. Markovych B.M. Rivniannia matematychnoi fizyky / Markovych B.M. – Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniky. – 2010. – 384 s.
4. Shajdurov V.V. Mnogosetochnye metody konechnyh jelementov / V.V. Shajdurov. – M., Nauka, 1989.–288 s.
5. Lopushanska H.P. Peretvorennia Fur'ie, Laplasa: uzahalnennia ta zastosuvannia /H.P. Lopushanska, A.O. Lopushanskyi, O.M. M'iaus. – Lviv.: LNU im. Ivana Franka. – 2014. – 152 s.

RESUME

M.G. Berdnyk

Mathematical model and generalized solution method Dirchele problems of heat exchange of radiation body

In this paper, the calculation of the non-stationary temperature field of an isotropic body of rotation with a known equation of the creature line in a cylindrical coordinate system is considered, which rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the final rate of heat propagation. Thermal-physical properties of which do not depend on temperature and internal sources of heat are absent. At the initial moment, the temperature of the body is constant, and on the outside of the cylinder temperature is known and does not depend on time.

For the first time, a mathematical model of temperature distributions of an isotropic body of rotation with a known equation of a creature line in a cylindrical coordinate system, which rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into

account the final rate of heat propagation, is presented as a boundary value problem of mathematical physics for a hyperbolic differential equation of thermal conductivity with boundary conditions of the first sort of To solve the boundary-value problem, the desired temperature field is represented as a complex Fourier series. A new integral transform has been developed by which the temperature field of the form of convergent orthogonal series in terms of special Fourier functions is found.

The solution of the generalized boundary-value heat transfer problem for an isotropic rotating body, which is rotated, taking into account the finiteness of the velocity of heat propagation, can be used for modulation of temperature fields that occur in many technical systems (satellites, roller mills, rotors of power aggregates, disk brakes, etc.)

Надійшла до редакції 09.06.2017